

CONSTITUTIVE MODELS FOR SOIL AND ROCK

Dragan Rakić ^{1*}  [0000-1111-2222-3333], Miroslav Živković ¹  [1111-2222-3333-4444]

¹ University of Kragujevac, Faculty of engineering, Kragujevac, Serbia

**corresponding author*

Abstract

The paper presents the procedure of implicit stress integration for constitutive models for soil and rock. The theoretical basis of Mohr-Coulomb, Matsuoka-Nakai, Hoek-Brown and Hyperbolic soil constitutive models are presented. Stress integration was performed using the theory of incremental plasticity. For solving the system of nonlinear equations, the governing parameter method was used. The general procedure of implicit stress integration of the mentioned constitutive models is shown, as well as the algorithm for their implementation. The presented constitutive models are implemented in the general-purpose program PAK intended for static and dynamic, linear and non-linear analysis of structures. Verification of the implemented algorithms are performed using test examples.

Keywords: Constitutive modeling, soil and rock, incremental plasticity, stress integration, PAK

1. Introduction

Uvod u konstitutivne modele tla i stena u geomehanici

Pregled značaja implicitne integracije napona u numeričkim modelima

Kratak opis primene u inženjerskim softverima (PAK)

Cilj i struktura rada

2. Theoretical Background of Constitutive Models (1.5 pages)

2.1 Mohr-Coulomb Model

Mohr-Coulomb konstitutivni model predstavlja jedan od najčešće korišćenih modela za simulaciju mehaničkog ponašanja tla (Smith & Griffiths, 2004; Balmer, 1952). Model definiše direktnu zavisnost smičućeg napona pri lomu τ_f od normalnog napona σ

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \quad (1)$$

koristeći dva materijalna parametra: koheziju (c) i ugao unutrašnjeg trenja u materijalu (ϕ).

Površ tečenja Mohr-Coulomb modela u prostoru glavnih napona ima oblik nepravilne šestostrane piramide čija se osa poklapa sa hidrostatskom osom, što je prikazano na Fig. 1.

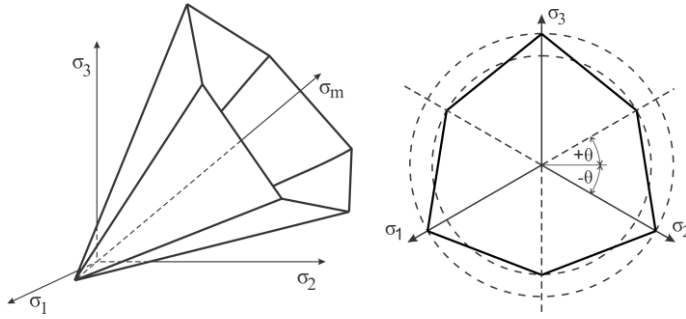


Fig. 1. Površ tečenja Mohr-Coulomb konstitutivnog modela u a) prostoru glavnih napona i b) devijatorskoj ravni

Jednačina površi tečenja ovog konstitutivnog modela je funkcija invarijanti napona I_1 i J_{2D} (Smith & Griffiths, 2004) i glasi

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi \quad (2)$$

Funkcija plastičnog potencijala, za slučaj neasocijativnog uslova tečenja, je definisana jednačinom

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right) \quad (3)$$

gde ψ predstavlja ugao dilatancije, dok je θ Lodeov ugao, definisan kao

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \quad (4)$$

gde je J_{3D} treća invarijanta devijatora napona.

1.1 Matsuoka-Nakai Model

Pri korišćenju Mohr-Coulomb jednačine površi tečenja, često se javlja numerički problem pri određivanju izvoda funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala za granične vrednosti Lodeovog ugla ($\theta = \pm 30^\circ$). Kako bi se ovaj problem prevazišao, uvedena je glatka Matsuoka-Nakai jednačina površi tečenja (Matsuoka & Nakai, 1974; Rocscience inc, n.d.; TNO DIANA BV, n.d.), koja ne sadrži diskontinuitete u smislu oštarih uglova, funkcija je invarijanti napona I_1, I_2, I_3 i opisana je jednačinom

$$f = I_3 + \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_1 I_2 \quad (5)$$

Površ tečenja Matsuoka-Nakai modela u prostoru glavnih napona, uporedo sa površi tečenja Mohr-Coulomb modela je prikazana na Fig. 2.

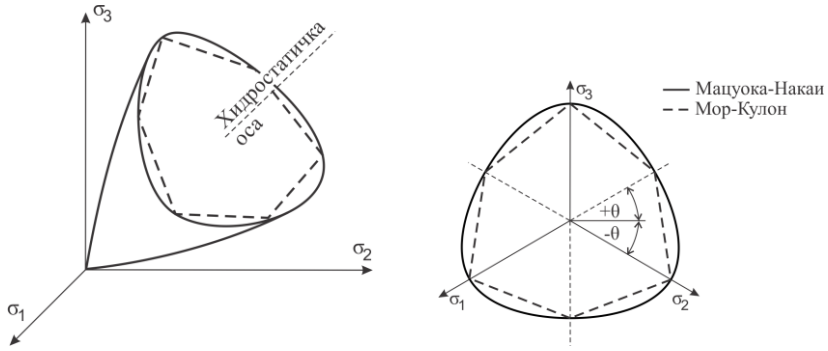


Fig. 2. Površ tečenja Matsuoka-Nakai modela u a) prostoru glavnih napona i b) devijatorskoj ravni

Jednačina plastičnog potencijala ovog modela (Matsuoka & Nakai, 1974) ima isti oblik kao i funkcija tečenja i glasi

$$g = I_3 + \frac{\cos^2 \psi}{9 - \sin^2 \psi} I_1 I_2 \quad (6)$$

Jednačina površi tečenja (5) ne sadrži koheziju materijala c , pa kako bi se ona uzela u obzir, neophodno je korigovati tenzor napona (Matsuoka, et al., 1994), u skladu sa jednačinom

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (7)$$

gde je δ_{ij} Kronekerov operator, dok $\sigma_0 = c \operatorname{ctg} \phi$ predstavlja maksimalni napon zatezanja.

Generalizovani Hoek-Brown model

Generalizovani Hoek-Brown konstitutivni model, namenjen simulaciji mehaničkog ponašanja stenske mase, definiše zavisnost između najvećeg i najmanjeg glavnog napona (Hoek, et al., 2002), u skladu sa jednačinom

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (8)$$

Jednačina površi tečenja ovog modela je funkcija invarijanti napona I_1 i J_{2D} i glasi

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left(\sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \quad (9)$$

Površ tečenja ovog modela u prostoru glavnih napona je prikazana na Fig. 3.

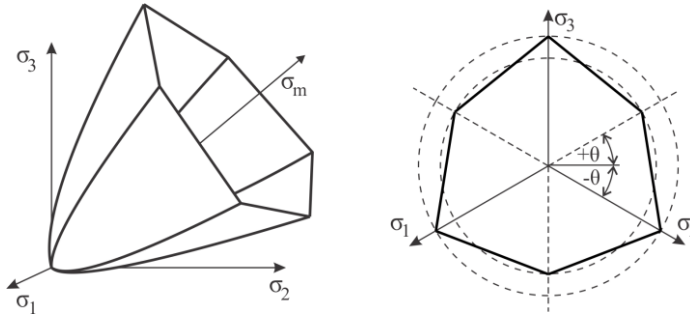


Fig. 3. Površ tečenja Hoek-Brown konstitutivnog modela u a) prostoru glavnih napona i b) devijatorskoj ravni

Jednačina plastičnog potencijala ima isti oblik kao i funkcija tečenja (Hoek, et al., 2002), razlikuje se za dilatacioni parametar m_{bdil} i glasi

$$g = \frac{I_1}{3} m_{bdil} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left(\sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \quad (10)$$

Veličina σ_{ci} predstavlja jednoosnu pritisnu čvrstoću stenske mase, dok su m_b , s i a parametri modela koji se određuju na osnovu parametara intakne stene m_i i GSI i faktora poremećenosti stene D , u skladu sa izrazima

$$m_b = m_i \cdot e^{\left(\frac{GSI-100}{28-14D}\right)} \quad (11)$$

$$s = e^{\left(\frac{GSI-100}{9-3D}\right)} \quad (12)$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{\left(\frac{-GSI}{15}\right)} - e^{\left(\frac{-20}{3}\right)} \right) \quad (13)$$

Hyperbolic soil model

Granularni nevezani materijali, kao što je krupnozrni pesak i kameni nabačaj, ne poseduju koheziju, pa se smičuća čvrstoća tla može definisati primenom efektivnih napona u obliku jednačine (Maksimović, 2008) koja definiše zavisnost smičućeg napona pri lomu od normalnog napona

$$\tau_f = \sigma_n \tan \phi(\sigma_n) \quad (14)$$

Za razliku od Mohr-Coulomb i Matsuoka-Nakai konstitutivnih modela, kod koji je ugao unutrašnjeg trenja parametar materijala, kod ovog modela ugao unutrašnjeg trenja u materijalu je funkcija normalnog efektivnog napona (Maksimović, 2008) i definisan je jednačinom

$$\phi(\sigma_n) = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_N}} \quad (15)$$

Uzimajući prethodno u obzir, smičuća čvrstoća tla može biti definisana jednačinom

$$\tau_f = \sigma_n \tan \left(\phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_N}} \right) \quad (16)$$

Veličine ϕ_B , $\Delta\phi$ i p_N u prethodnim jednačinama, predstavljaju parametre konstitutivnog modela. Površ loma ovog konstitutivnog modela, u naponskom prostoru $\sigma - \tau$, je prikazana na Fig. 4.

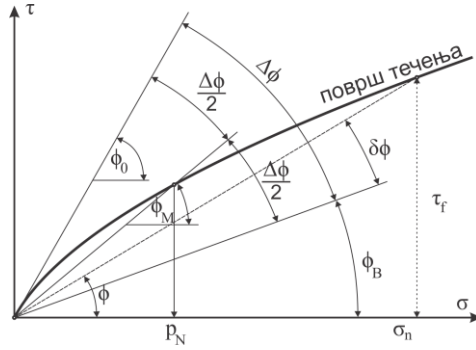


Fig. 4. Površ tečenja Hyperbolic soil modela

Radi uopštavanja modela i njegove numeričke implementacije, ugao unutrašnjeg trenja definisan izrazom (15), može biti izražen primenom srednjeg napona, prema

$$\phi_s = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_m}{p_{AV}}} \quad (17)$$

gde parametar p_{AV} prema (Maksimović, 2008) može biti izračunat kao

$$p_{AV} = p_F \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right) \quad (18)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja, može se uočiti da jednačina površi loma hyperbolic soil modela, odgovara jednačini površi loma Mohr-Coulomb modela (1), s tim što ne postoji kohezija materijala i što je ugao unutrašnjeg trenja funkcija napona. Iz tog razloga se površ tečenja ovog modela može izraziti primenom invarijanti napona, na sličan način kao za Mohr-Coulomb model, uz uzimanje u obzir prethodno navedenih specifičnosti modela

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi(\sigma) + \sqrt{J_{2D}} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi(\sigma) \right) \quad (19)$$

U slučaju ovog konstitutivnog modela, analiziran je acocijativni uslov tečenja, odnosno slučaj kada su funkcije plastičnog potencijala i funkcije tečenja identične.

3. Implicit Stress Integration Procedure (2 pages)

3.1 General Algorithm for Implicit Stress Integration

Prema teoriji inkrementalne plastičnosti, u slučaju kada se naponska tačka nalazi ispod površi tečenja, u tekućoj konfiguraciji postoji priraštaj samo elastične deformacije. Međutim, u slučaju kada se naponska tačka nađe na površi tečenja, u tekućoj konfiguraciji, pored elastične deformacije, postoji i priraštaj plastične deformacije. U tom slučaju, priraštaj ukupne deformacije može biti predstavljen kao zbir elastičnog i plastičnog dela deformacije, u skladu sa

$$d\mathbf{e} = d\mathbf{e}^E + d\mathbf{e}^P \quad (20)$$

Vektor priraštaja plastične deformacije ima pravac normale na površ plastičnog potencijala g i definisan je jednačinom

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

gde je $d\lambda$ takozvani plastični množilac, koji je potrebno odrediti. Prema pomenutoj teoriji inkrementalne plastičnosti, u svakoj konfiguraciji važi da je

$$f \leq 0, \quad d\lambda \geq 0 \quad \text{and} \quad f \cdot d\lambda = 0 \quad (22)$$

Kako bi relacije (22) bile zadovoljene, u slučaju kada se naponska tačka nalazi ispod površi tečenja, važi da je $f < 0$, dok u slučaju kada je naponska tačka na površi tečenja, važi da je

$$f = 0 \quad \text{and} \quad df = 0 \quad (23)$$

odakle sledi da je

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}^T d\kappa = 0 \quad (24)$$

gde je κ takozvana unutrašnja promenljiva (promenljiva zasnovana na plastičnoj deformaciji) koja postoji u slučaju modela sa deformacionim ojačanjem.

Kako je napon posledica isključivo elastičnih deformacija, priraštaj napona u tekućoj konfiguraciji se može izračunati prema

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E (d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P) \quad (25)$$

gde je $\mathbf{C}^E$ elastična konstitutivna matrica (matrica elastičnih koeficijenata).

Zamenom jednačine (25) u (21), a zatim njenom zamenom u (24), ona postaje

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \left(\mathbf{C}^E d\mathbf{e} - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - d\lambda H = 0 \quad (26)$$

gde je H takozvani modul ojačanja

$$H = - \frac{\partial f}{\partial \kappa}^T \frac{\partial \kappa}{\partial d\mathbf{e}^P} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (27)$$

Iz jednačine (26) se može izračunati plastični množilac $d\lambda$ prema

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (28)$$

na osnovu čega se primenom (21) može izračunati priraštaj plastične deformacije.

4. Implementation in PAK program (1 page)

Prethodno prikazane jednačine za implicitnu integraciju napona konstitutivnih modela za tlo i stensku masu su u nastavku sumirane u obliku algoritma prikazanog u Table 1. Algoritam je primenjiv na sve prethodno izložene konstitutivne modele i implementiran je u program PAK (Kojić, et al., .) u prikazanom obliku.

Table 1 Implicit stress integration algorithm

Poznate veličine na početku koraka: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, ${}^t\mathbf{e}$, ${}^t\sigma$, ${}^t\mathbf{e}^p$, ${}^t\kappa$

A. Probno (elastično) rešenje za napon:

$$d\sigma = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e} - {}^t\mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + d\sigma$$

Izračunavanje vrednosti funkcije tečenja:

$$f = f({}^{t+\Delta t}\sigma)$$

B. Provera uslova tečenja:

IF ($f < 0$) probna rešenja su elastična (Goto E)

IF ($f \geq 0$) elasto-plastična rešenja (Continue)

Nalaženje izvoda:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial g}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial \kappa}, \frac{\partial \kappa}{\partial d\mathbf{e}^p}$$

Određivanje $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \sigma} + H}$$

C. Korekcija $d\lambda$ (lokalne iteracije):

$$d\mathbf{e}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p$$

$$d\sigma = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + d\sigma$$

Izračunavanje vrednosti funkcije tečenja:

$$f = f({}^{t+\Delta t}\sigma)$$

D. IF ($abs(f) \geq tol$) vrati se nazad na C sa novim $d\lambda$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p = {}^t\mathbf{e}^p + d\mathbf{e}^p$$

E. Veličine na kraju koraka: ${}^{t+\Delta t}\sigma$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p$, ${}^{t+\Delta t}\kappa$

Verification and Test Examples (0.5 pages)

Verifikacija algoritma za implicitnu integraciju napona prikazanih konstitutivnih modela za tlo i stensku masu je izvršena kroz verifikacione primere, za svaki od navedenih modela. U nastavku

su prikazani rezultati numeričke simulacije troosnih testova i testova direktnog smicanja na jednom heksaedarskom konačnom elementu jediničnih dimenzija. Numeričke simulacije navedenih testova predstavljaju jednostavan način verifikacije konstitutivnog modela kroz poređenje rezultata sa analitičkim ili sa eksperimentalnim rešenjima datog problema.

Troosni test

Numerički model troosnog testa sa graničnim uslovima i opterećenjima je prikazan na Fig. 5a. Usled postojanja tri ravni simetrije problema, modelirana je jedna osmina modela uz korišćenje odgovarajućih graničnih uslova simetrije. Opterećenje je zadato korišćenjem pritiska na slobodnim površinama modela, u sva tri koordinatna pravca. Pritisak je zadat u dve faze: u prvoj fazi se uspostavlja sferno naponsko stanje, dok u drugoj fazi dve komponente pritiska zadržavaju zadatu vrednost, dok se treća komponenta povećava do sloma uzorka, odnosno dok se naponska tačka ne nađe na površi tečenja, što se manifestuje nemogućnošću postizanja konvergencije u numeričkom proračunu. Numerički test je, kao i eksperiment, sproveden za pet različitih nivoa sfernog naponskog stanja i to: $\sigma_m = 0.05 \text{ MPa}$, 1.10 MPa , 5.20 MPa , 10.1 MPa i 17.1 MPa .

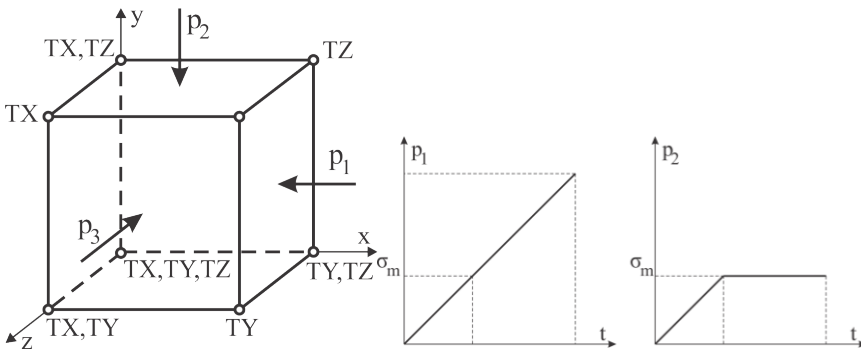


Fig. 5. Model za simulaciju troosnog testa i funkcije opterećenja

Funkcije opterećenja korišćene u numeričkoj simulaciji su prikazane na Fig. 5b, dok su parametri konstitutivnih modela, dobijeni identifikacijom, dati u Table 2.

Table 2. Parametri konstitutivnih modela u simulaciji troosnog testa

Constitutive model	Young' s modulus E (kN/m ²)	Poisson' s ratio ν (-)	Cohesion c (kN/m ²)	Internal friction angle ϕ (°)	Material parameter ϕ_b (°)	Material parameter $\Delta\phi$ (°)	Material parameter p_n (kN/m ²)	Uniaxial copressive strength σ_{ci} (kN/m ²)	Material parameter m_b (-)	Material parameter s (-)	Material parameter a (-)
MC	100	0.25	0.20	7.0	-	-	-	-	-	-	-
Hyp	100	0.25	-	-	6.2	15.8	4.80	-	-	-	-
HB	300	0.25	-	-	-	-	-	23.0	0.481	2.0×10^{-4}	0.532

Rezultati numeričke simulacije troosnog testa su prikazani u prostoru $\sigma_m - q$, na Fig. 6. Na slikama su prikazane površi tečenja različitih konstitutivnih modela i naponske putanje.

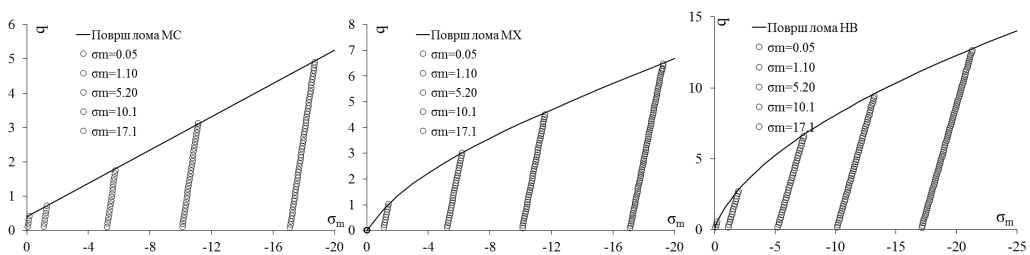


Fig. 6 Površni tečenja i putanja naponske tačke: a) Mohr-Coulomb, b) Draker-Prager, v) Maksimović, g) Hoek-Brown (kPa)

Na osnovu dobijenih rezultata se može zaključiti da razvijeni i implementirani algoritmi daju teorijske vrednosti napona pri lomu, za svaki od korišćenih konstitutivnih modela, odnosno da su dobijena numerička rešenja u skladu sa teorijskim vrednostima napona pri lomu.

Test direktnog smicanja

Identifikacija parametara konstitutivnih modela u numeričkim simulacijama je izvršena na osnovu rezultata ispitivanja materijala potpornog tela brane [ref]. Analizirani materijal predstavlja kameni nabačaj, pa su u skladu sa tim korišćeni konstitutivni modeli za simulaciju mehaničkog ponašanja granularnih materijala, kao što su Mohr-Coulomb, Matsuoka-Nakai i Hiperbolički model tla.

Granični uslovi i opterećenje numeričkog modela odgovaraju uslovima koji vladaju u smičućem sloju aparata za direktno smicanje i prikazani su na Fig. 7a. Opterećenje numeričkog modela je zadato u dve faze: u prvoj fazi je zadat normalni napon do nivoa napona korišćenog u eksperimentu, nakon čega se vrši smicanje, korišćenjem zadatih pomeranja. Funkcije opterećenja korišćene u ovoj simulaciji su prikazane na slici Fig. 7b.

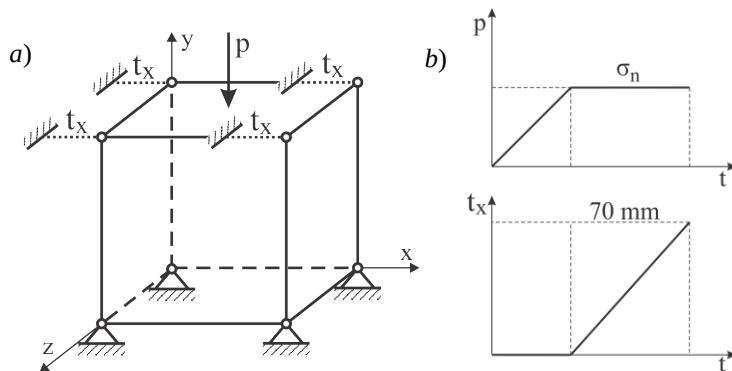


Fig. 7 Model za simulaciju testa čistog smicanja i funkcije opterećenja

Vrednosti napona pri lomu ispitivanih uzoraka su prikazane u Table 3. Prikazane vrednosti normalnih napona su takođe korišćenje u numeričkoj simulaciji testa smicanja.

Table 3 Izmerene vrednosti napona pri lomu

Sample No.	Normal stress σ_n [kPa]	Failure shear stress τ [kPa]
1	209	200
2	426	276

3	813	440
4	1713	927

Korišćenjem izmerenih vrednosti normalnog i smičućeg napona prikazanog u Table 3, izvršena je identifikacija parametara modela. Rezultat identifikacije primenom Mohr-Coulomb i Hiperboličkog modela tla je prikazan na Fig. 8, dok su parametri modela prikazani u Table 4.

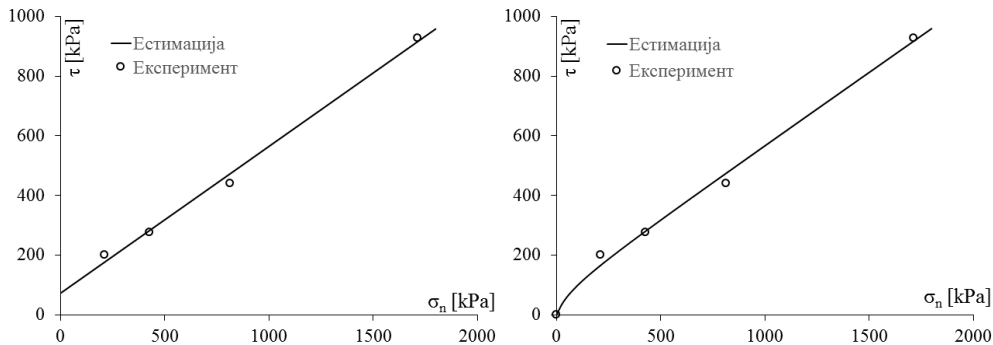


Fig. 8 Površ loma Mohr-Coulomb modela dobijena postupkom identifikacije

Identifikovani parametri Hiperboličkog modela tla su zatim korišćeni u numeričkoj simulaciji testa direktnog smicanja primenom numeričkog modela prikazanog na Fig. 7a. Rezultati numeričke simulacije, zajedno sa rezultatima ispitivanja, su prikazani na Fig. 9.

Table 4 Parametri konstitutivnih modela u simulaciji testa smicanja

Constitutive model	Young' s modulus E (MN/m ²)	Poisson' s ratio ν (-)	Cohesion c (kN/m ²)	Internal friction angle ϕ (°)	Material parameter ϕ_b (°)	Material parameter $\Delta\phi$ (°)	Material parameter p_n (kN/m ²)
MC	100	0.30	72.6	26.2	-	-	-
Hyp	100	0.30	-	-	25.9	35.1	112.0

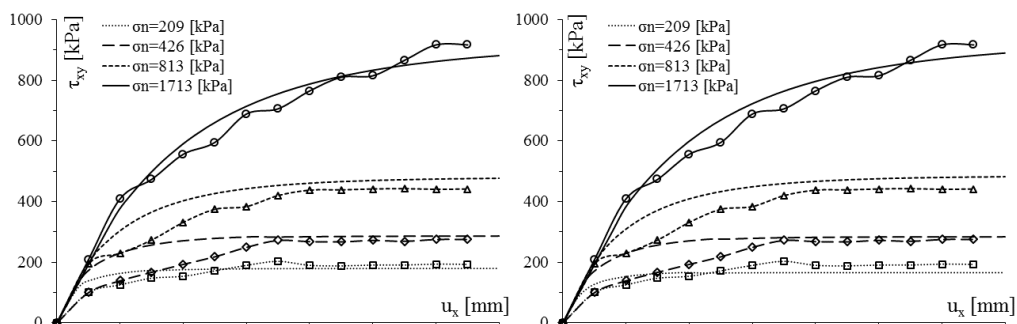


Fig. 9 Pure shear test using Mohr-Coulomb model

Analizom rezultata dobijenih primenom Mohr-Coulomb i Hyperbolic soil model može se uočiti dobro poklapanje sa rezultatima eksperimentalnih ispitivanja uzoraka, za sve vrednosti normalnog napona korišćenog pri ispitivanju. Ovo potvrđuje da se i na osnovu relativno jednostavnog testa smicanja mogu identifikovati parametri konstitutivnog modela za upotrebu u numeričkim simulacijama. Takođe se vidi da razvijeni algoritmi konstitutivnih modela dobro opisuju mehaničko ponašanje analiziranih uzoraka granularnih materijala. Radi dodatnog povećanja tačnosti numeričkih simulacija, ovako usvojene materijalne konstante je moguće dodatno kalibrisati. Na taj način se mogu minimizovati odstupanja mehaničkog ponašanja numeričkih modela od ponašanja realnih uzoraka materijala.

4. Conclusions

In the conclusions (and summary) the main results of the paper should be provided. The conclusions should not be copy-paste text from the previous text and Abstract.

Acknowledgements: (example:)The authors acknowledge support of the Ministry of Science of Serbia, grant OI144-2/08; and City of Kragujevac, Contract 1224/08.

References

- Balmer, G., 1952. A general analytical solution for Mohr's envelope. *Proceedings of American Society for Testing and Materials*, vol. 52, pp. 1260-1271.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. USA: Massachusetts Institute of Technology.
- GEO-SLOPE International Ltd, 2009. *Stress-Deformation Modeling with Sigma/W*, Canada: GEO-SLOPE International Ltd.
- Hoek, E., 2007. *Practical rock engineering*. North Vancouver, Canada: Evert Hoek Consulting Engineer Inc..
- Hoek, E., Carranza-Torres, C. & Corkum, B., 2002. *Hoek-Brown failure criterion - 2002 edition*. Toronto, Canada, s.n., pp. 267-273.
- Maksimović, M., 2008. *Mehanika tla, četvrto izdanje*. Beograd: AMG knjiga.
- Matsuoka, H. & Nakai, T., 1974. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Tom 232, pp. 59-70.
- Matsuoka, H., Sun, A. & Konda, T., 1994. *A constitutive law from frictional to cohesive materials*. New Delhi, s.n.
- Rocscience inc, n.d. *Plasticity Models in Phase2*. [Na mreži]
Available at:
http://www.rocscience.com/downloads/phase2/webhelp/phase2.htm#phase2_model/
- Smith, I. & Griffiths, V., 2004. *Programming the Finite Element Method*. England: John Wiley & Sons Ltd.
- TNO DIANA BV, n.d. *DIANA - Finite Element Analysis*. [Na mreži]
Available at: <http://tnodiana.com/upload/files/DIANA/942/HTML/GeoTech/GeoTech.html>