Научни скуп
Савремено предшколско васпитање и образовање – тенденције, изазови и могућности
Педагошки факултет у Ужицу
20. октобар 2023.

ISBN 978-86-6191-076-0
DOI 10.46793/SPVO23.434E
УДК 371.382-053.4
Прегледни научни чланак
стр. 343–356

Миломир Д. Ерић[*]
Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице
Оливера Р. Марковић[*]
Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице

О НЕКИМ АСПЕКТИМА БРОЈА И БРОЈАЊА

Апстракт: Аутори су у раду покушали да осветле *проблем броја* са више страна. Најпре су анализиране кључне дефиниције броја које су одредиле наше разумевање броја у математици као науци, али и у настави математике. Реч је схватању броја у филозофији и математици старе Грчке, питагорејаца и Платона пре свега, а након тога је указано на потпуно другачије схватање и математике и броја у савременој филозофији математике. Акценат је стављен на логицистичку дефиницију броја. Оно што се намеће као, условно речено, закључак, јесте постојање једне *а приори* структуре која омогућава различите врсте односа према броју чак и код животиња, или деце у најранијем узрасту. Овај сегмент анализе поткрепљен је бројним психолошким истраживањима. Указано је и на значај који број има у ширем, духовном контексту наше културе.

Кључне речи: *број, математика, питагорејци, психологија, митологија.*

Математичари, обично, игноришу дечја и филозофска питања јер и једна и друга питања сматрају – дечјим. Она су за њих наивна, и то је истина, јер она заиста нису утемељена на претходно изграђеном теоријском становишту или систему аксиома. Деца слободно питају о свему и њихова наивност огледа се у чињеници да мисле да се о свему може питати, па и о почецима тог свега.

Кад одрасту, деца углавном забораве та питања. Постану „мудри одрасли” чија се мудрост састоји у „знању” да се важна питања не постављају. Ако их не забораве, онда постају филозофи који се препознају по опсесивном инсистирању, пре свега, на питањима о почетку. Хусерл (Husserl) није без разлога рекао да је филозоф *вечити почетник*. А шта је на почетку математике ако није број и зар онда није очекивано да се филозофи највише интересују за

[*] eric@pfu.kg.ac.rs
[*] markovic@pfu.kg.ac.rs

број? Међутим, историчари математике користе различите начине да управо питање о броју заобиђу и да почну од следећег корака, аритметичких операција, на пример. На питање шта је на почетку математике и да ли је то број, један историчар математике наводи, духовиту опаску, да је на почетку заиста број и да људи „у почетку бројаху овце, а потом су се ствари искомпликовале” (Божић, 2002: 7). Ми смо желели да покажемо да су ствари биле већ довољно компликоване и са бројањем оваца!

ФИЛОЗОФИЈА МАТЕМАТИКЕ ИЛИ МАТЕМАТИЗАЦИЈА ФИЛОЗОФИЈЕ

Када се осврнемо на историју ове две дисциплине тешко је дати јасан и дефинитиван одговор на питање – да ли је реч о историји филозофије математике или је у питању стална математизација филозофије? И колико год да идемо у прошлост, трагајући за почетком, увек затичемо овај однос већ успостављен, а везу између филозофије и математике испреплетану и чврсту. Многи филозофи су сматрали да је тај однос апсолутно природан и нужан, наглашавајући значај и важност математике, као кључне претпоставке и предуслова за настанак филозофије. Платон је на експлицитан начин то исказао кроз натпис на улазу у Академију, који је, по легенди, гласио: *Нека не улази ко не зна геометрију*! За Платона математика је била сам темељ рационалног знања о универзуму од кога сваки филозоф мора почети. О томе, на сличан начин, говоре и Декарт, Спиноза, Кант и многи други.

Математика као наука створена је, дакле, веома давно, у време старе Грчке, када је започео развој свега онога што сматрамо данас важним за европску културу: поред филозофије и математике, то је време настанка грчке уметности, драме, политичке мисли... Шта је и под којим условима покренуло стварање овог *унутрашњег простора,* ограниченог једино правилима универзалне рационалности којој се повинују људи који су себе почели да називају математичари и филозофи остаће, вероватно, заувек тајна. У овом *простору* не постоје ни религиозни, ни традиционални, ни политички ауторитети, нити је форма саопштавања истине „митос” (прича) – оно што је овде *истина* мора бити саопштено у форми *доказа* који је „зависан само од рационалне демонстрације, доступан свима и принципијелно оповргљив, тако да онај који тврди да је нешто истина, а то се на крају покаже да није истина, мора то и признати. [...] Доказ има да буде доказ и то је све” (Badiou, 2016: 31–32). Или као што кажу Бурбаки[1] (Bourbaki) у *Théorie des ensembles*: „Од старих Грка до данас, ко каже *математика*, заправо каже – *доказ*” (Bourbaki, 1970: E.I.7).

---

[1] Николас Бурбаки је колективни псеудоним групе француских математичара, бивших студената *École normale supérieure*. Група је основана 1934/35. године и током двадесетог

Кроз тешко прозирне магле времена и историје увек се издваја неколико имена, Талес и Питагора, пре свега.[2] Сабо (Szabo) као добру илустрацију новог доба и формулисања методе мишљења које је своје прецизирање задобило у математици, наводи и Парменидово закључивање: „Очигледно је да индиректни аргумети играју веома важан део елејске филозофије. Без тога не би било могуће успоставити основу учења као што су *не-кретање*, *не-промена*, *не-постајање*, *не-пропадање*, *не-простор*, *не-време*. [...] ја верујем да је утицај елејске филозофије био значајан за одбацивање емпиризма и визуелног потврђивања у грчкој математици” (Szabo, 1978: 216).

Бадју (Badiou), такође, сматра да је закључивање на основу противуречности одлучујући квалитет менталне моћи која је открила математику. Укратко, закључивање по апсурдности доказује да исказ *п* је истинит, не тако што ће „конструисати” директно његову истину полазећи од већ утврђених истина, већ доказујући да је супротан исказ, исказ *не-п*, обавезно лажан.

Талес, откривајући простор *апстрактног* у коме бивствују филозофија и математика – стварајући математику као дедуктивну науку одвојену од конкретне стварности – управо је у овој апстрактности пронашао упориште за сигурност математике и њене истине до које се долази помоћу доказа.Утицај геометрије на филозофску и научну методу био је веома дубок, јер је геометрија, коју су Грци утемељили, полазила од аксиома који су били очигледни сами по себи, затим је дедуктивним поступком закључивања стизала до теорема које нису биле очигледне и које су се могле искуствено потврдити. Одатле је следио закључак да је свет могуће спознати тако што ћемо, када спознамо оно што је очигледно, применити дедукцију и тако доћи до истине.

Питагора је наставио да развија математику као сигурну апстрактну спознају. По Аристоксеновом сведочењу људи су, до Питагориног времена, бројеве користили искључиво у трговачким пословима: „Науку пак о бројевима чини се да је највише од свих почастио и унаприједио Питагора: одвео ју је из трговачке службе и све је ствари поређивао с бројевима” (Diels, 1983: 398).

века постала је позната по серији уџбеника посвећених чистој математици који су објављени под заједничким именом *Éléments de mathémathique.*

[2] Аутори не могу прећутати извесну нелагоду коју осећају док говоре о хронологији старог века. Нелагода се увек јавља кад нисте у потпуности сигурни у истинитост онога о чему говорите. За нашу несигурност крив је, наравно, један математичар! Од друге половине седамдесетих година прошлог века, један од најзначајних руских математичара двадесетог века, Анатолиј Фоменко (А. Т. Fomenko) примењујући математичко-статистичке методе на историјска документа, затим анализирајући астрономске хороскопе, ствара нову хронологију људске историје. Оно што смо навикли да зовемо „стара Грчка” по његовим истраживањима одиграло се, не у вековима пре нове ере, већ од 13. до 16. века нове ере. Такође рођење Исуса Христа, по његовом мишљењу, треба датирати у 1152. годину нове ере. Код нас је преведена једна од његових првих књига о хронологији, *Статистичка хронологија – математички поглед на историју*.

Математика – као дедуктивно извођење доказа – већ од почетка, нешто је више од саме математике. Њени докази, у извесном смислу, нису били од овога света, они су били резултат чистог мишљења чију сигурност и истинитост емпиријско знање не може да обезбеди, а, с друге стране, изгледало је да математичко знање може да се примени на емпиријски свет. Математика је оснаживала уверење да је предмет мишљења истинитији од онога што видимо, да је мисао изнад чула. Или како каже Расел (Russell), парафразирајући Хегела: „Уколико се свет чула не слаже са математиком, утолико горе по свет чула” (Rasel, 1998: 48). И, ако је мистицизам веровање да поред овог света постоји, у исто време, и неки други свет, онда је потпуно разумљиво што је математика од самог почетка била прожета посебним обликом мистицизма. „Математика је, верујем, основни извор веру у вечиту и праву истину, као и у разумски свет који надилази људска чула. [...] јер су математички објекти као што су бројеви, ако су уопште стварни, вечити и безвременски” (Rasel, 1998: 54).

Кључно питање на које су питагорејци тражили одговор јесте питање које се тиче начина постојања бројева, њиховог онтолошког статуса. Питагорејски приступ бројевима био је, у извесном смислу, непосредан и наиван - број је био тај облутак или ти облуци, или та дуж. Он је *био* ствар. Тако Аристотел каже да за питагорејце ствари јесу бројеви и да је све што постоји састављено од бројева. Није лако разумети шта питагорејци мисле под оваквим бројем. Аристотел у *Метафизици* каже да га они схватају као математички број, али сматрају да се он налази у самим стварима. (*Метафизика*, 1080b: 2–3) То би значило да је математички број и број на коме је утемељен космос један те исти број. Рећи да је све број један је од начина да се каже да је космос нумеричка структура. На тај начин је први пут у контексту старије филозофије математике постављен њен фундаментални проблем – какав је однос сигурне апстрактне математике и конкретне природе. Питагора је први поставио проблем и понудио решење – природа и математика имају исти *физис*, и природа и математика су *бројевне природе*, одакле следи могућност примене апстрактне математике на конкретну природу.[3] Временом ће овај питагорејски увид бити доведен у питање чиме ће се отворити проблем примењивости математике на конкретно, што постаје и остаје најважнија тема старије филозофије математике.

Талесу се приписује прво схватање броја као мноштва састављеног од јединица. Међутим, Аристотел наводи у *Метафизици* да такво схватање броја деле и питагорејци. (*Метафизика*, 986a: 20 et pass). За Аристотела, као и за Еудокса, број је ограничено мноштво (*Метафизика*, 1020a: 13). И поред тога што је број доследно дефинисан као мноштво јединица, сама јединица није

[3] „Већина данашњих и некадашњих физичара који верују у примењивост апстрактне математике у физици исто су толико мистици колико је то и Питагора, јер се њихова вера углавном заснива на идентификацији Питагориног типа” (*Новија филозофија математике*, 1987, стр. 13).

увек била једнозначно одређена. Аристотел јединицу није сматрао бројем, већ мером броја. Становиште да јединица није број него основ броја временом је превладало и ушло је у Еуклидове *Елементе*. Ово становиште заступаи Платон који у *Држави* (526а) каже да је математички број састављен од апстрактних, међусобно идентичних јединица. Сваки број се може добити додавањем јединице претходном члану низа почевши од јединице саме. Међутим, око статуса математичког броја у Академији не постоји сагласност. За Платона број бивствује између света идеја и ствари, што значи да он није једна од идеја. Платон за разлику од питагорејаца сматра да не постоји поклапање и идентификација између апстракног и конкретног, тврдећи да је *идејно* објективни норматив и коректив конкретном. Спеусип, такође, није признавао идеје-бројеве и сматрао је да постоји само математички број. Ксенократ је, с друге стране, изједначавао математичке бројеве и идеје (*Метафизика*, 1080b 13-6).

Према томе, може се казати да грчки појам броја (гр. Αριθμός) репрезентује множину објеката, и то мерљиву јединицом.

Новија филозофија математике, с друге стране, свој смисао постојања види у решавању проблема који се за старију филозофију математике уопште није постављао – то је питање *сигурности* апстрактне, чисте математике. Окупирана овим проблемом она и не долази до питања *примењивости* који је вековима био најважнији проблем. Или га свесно одбацује као што то чини Гудштајн (R. L. Goodstein), који, говорећи о проблему *постојања* у математици, каже: „Наравно, логички проблем примјене математике у стварном свијету врло је занимљив и од великог је филозофског значаја; ја се на њега не обазирем [...]”. И поредећи математику с шахом додаје: „Окренемо ли се сада од шаха к аритметици, видимо да одговор на наше прво питање, постоји ли број два, гласи: број два је једна од улога коју играју знакови у аритметици, и право питање није постоји ли број два, него постоји ли аритметика. [...] Чини ми се да аритметику не смијемо схватити једном игром попут шаха, него радије једном развијајућом серијом игара” (Goodstein, 1987: 122–123).

Дакле, питања новије филозофије математике су, пре свега: На чему се темељи *сигурност* чисте математике? У двадесетом веку добили смо три одговора на ова питања: одговор логицизма, интуиционизма и формализма.

За нашу анализу важно је нагласити да питање о *сигурности* математике отвара и питање о *предмету* математике. О чему заправо говори математика, да ли она уопште описује неке *предмете* и ако их описује, који је модалитет њиховог постојања? Шта је њихов *modus vivendi*?

Видели смо, када је реч о првом предмету математике, *природном броју*, наша објашњења кроз историју крећу се од једне до друге неодређености. Број везујемо уз реалне предмете, њихова количинска својства, урођене идеје, објективне идеје... Леополд Кронекер (Leopold Kronecker) у свом предавању из 1886. године каже: „Природни бројеви су једино што нам је драги Бог дао, све остало је човеково дело” (Божић, 2002: 237). Наравно, то је само духовит начин да се каже да ми о темељу или почетку саме математике, ако је то природни број, не можемо ништа да кажемо, јер су то божанске ствари које превазилази људски ум. Питагора, би се, с првим делом ове тврдње, несумњиво сложио.

Вратимо се разматрањима о броју и погледајмо једно од решења овог проблема. Оно што је најчешћи случај, када говоримо, на пример,о броју 3, јесте да је најједноставније и најпоучније упућивање на одређени скуп. На пример, скуп који чине палац, кажипрст и средњи прст и све то праћено говорном поуком из бројања која се састоји у изговарању бројева један, два и три док у исто време показујемо поједине чланове датог скупа. И то је заправо поступак који примењујемо у првим покушајима да децу научимо да броје. Међутим, основни приговор овој поуци јесте управо то да је она *самопоука* о употреби бројева, која унапред претпоставља знање о томе *шта су* бројеви и *где су* бројеви који се овде придружују појединим прстима. На овом приговору се базира и логицистичко разумевање логичког статуса природних бројева: „[...] они су логички атрибути који не припадају предметима већ појмовима. Да је неки број, рецимо 3, број неког појма, значи да под тај појам потпадају три објекта” (Carnap, 1987: 37).

На тај начин бројеви су дефинисани преко кореспондентних скупова, прецизније речено као заједничко *својство* међусобно кореспондентних скупова. Тако је број схваћен као скуп свих међусобно сличних скупова (*Новија филозофија математике*, 1987: 22–23).

Овим завршавамо кратак преглед неколико најважнијих концепција броја у старој и новој филозофији математике. Наравно, без претензије да он буде свеобухватан и исцрпан. Желели смо да истакнемо могуће правце размишљања о проблему броја. Видимо да се схватања античких филозофа и математичара битно разликују од начина на који данашња филозофија математике гледа на број. Међутим, да ли је истина филозофа и математичара једина „истина” о броју? Како схватају бројеве они који нису ни филозофи ни математичари? Могу ли нам птице и деца рећи нешто важно о броју?

ОСЕЋАЈ ЗА БРОЈ – ПТИЦЕ, МАЈМУНИ, ЛАВОВИ И ЈЕДАН КОЊ

Ако питамо психологе – *ко броји* – добићемо следећи одговор: *Скоро сви*! Голубови, пацови, мајмуни, многе друге животиње, укључујући и човека! Истраживања, од којих ћемо нека поменути, а која су обављена на животињама, деци и одраслима, дају, заиста, обиље материјала чијом анализом можемо стећи барем делимичан увид у дубину проблемао коме покушавамо нешто да кажемо.

Тобајас Данциг (Tobias Dantzig) у својој књизи *Number, the language of science* увео је појам *осећај за број* који се од тада често користи у психологији да означи један *проширен* начин употребе и говора о броју. Дакле говори се, условно речено, о *броју*, али који није строго математички или филозофски број. Он пише: „Човек, чак и на нижим ступњевима развоја, поседује способност коју ћу, у недостатку другог имена, назвати *осећајем за број*. Ова способност му омогућава да примети промену у мањој групи када се, без његовог директног знања, тој групи одузме или дода неки предмет. Осећај за број не треба мешати са бројањем који је вероватно много каснијег порекла и укључује, као што ћемо видети, прилично замршен ментални процес. Бројање је, колико знамо, искључиво људски атрибут, док неке животиње изгледа да поседују рудиментарно чуло за бројеве слично нашем” (Dantzig, 1945: 1).

Међутим, веома брзо, истраживања везана за *осећај за број*, проширила су се и на животињски свет. Један од првих истраживача који је дошао до закључка да птице имају осећај за број био је немачки психолог Ото Кохлер (Otto Koehler). У једном од експеримената које је спроводио, гаврану по имену Јакоб, показиване су две кутије, од којих је у једној било хране. На поклопцима кутија био је распоређен различит број тачака. Карта поред кутије имала је исти број тачака као кутија са храном, само другачије распоређене. Гавран је, након бројних понављања научио да отвори кутију на чијем се поклопцу налази исти број тачака као на карти, ако жели да дође до хране. По Којхлеу, он је умео да уочи разлику између две, три, четири, пет и шест тачака (Koehler, 1951: 41–45).

Многе птице осећај за број испољавају кроз тачан број понављање одређеног тона у својим песмама. На пример, канаринац који је одрастао на једном подручју понавља одређени тон шест пута, док канаринац одрастао на другом месту понавља седам пута. Чињеница да је број понављања непроменљив и непогрешив долази се до закључка да птица препознаје број понаваљања у својој мелодији.

Измештање истраживања о броју, или прецизније речено о *осећају за број*, из сфере математике и филозофије у сферу анималног, отворио је нову димензију разумевања *бројности* као једне од суштинских структура света и живота, која је чак у функцији његовог опстанка.

Један од важних закључака истраживања на животињама јесте да је *осећај за број* у директној функцији преживљавања. Животиње које су у стању да упореде бројност противника и бројност своје групе могу да направе животно важну процену да ли да беже или да се боре. Ако је група нападача бројнија онда је сврсисходније бежати, а ако је малобројнија онда има смисла остати и борити се. Карен Мекомб (Karen McComb) са својим сарадницима обавила је истраживање које је у великој мери потврдило претходно речено. Они су мањим групама лавица у националном парку Серенгети у Танзанији пуштали снимљену рику лавова. Када би број различитих гласова са снимка премашио број лавица у групи оне би се повлачиле, међутим ако би број лавица био већи оне би остајале и припремале се за борбу. Очигледно је у питању врло апстрактна способност поређења бројности сопствене групе коју виде и бројности групе чије припаднике само чују (McComb, Packer, Pusey, 1994: 385).

Експерименти са шимпанзама изазвали су највећу пажњу што је, наравно, очекивано, пошто се од мајмуна разликујемо тек за неколико процената. Барем када је ДНК у питању! Јапански научник Тецуро Мацузава (Teotsuro Matsuzawa) осамдесетих година прошлог века научио је шимпанзу Али да користи арапске бројеве од 1 до 9 за одређивање броја предмета у групи с тачношћу и до 95 посто (Matsuzawa, 1985: 57–59). У једном од најимпресивнијих истраживања које је спроведено, Сара Бојсон (Sarah Boyson) научила је шимпанзу Шели да придружује картице са исписаним бројевима од 1 до 9 адекватним групама предмета. Такође, умела је да изводи једноставна сабирања користећи симболе. Када би јој показали картице са бројевима два и три она би одмах показивала картицу са бројем пет (Boyson & Bernston, 1996: 76–86).

Најпознатија прича о животињама и бројању,ипак, је прича о коњу који *није* умео да броји. Тај случај бацио је сенку на резултате које су уз самопрегоран труд постизали многобројни пацови, канаринци, папагаји, делфини, мајмуни у бројним истраживачким лабораторијама. О чему се ради? Почетком двадесетог века у Немачкој живео је коњ по имену Ханс. Његов газда, господин Вилхем фон Остен, после десет година упорног рада објавио је да је свог коња Ханса научио аритметику. Када би Фон Остен пред многобројном публиком на табли написао 3 плус 5 и показао коњу, коњ би пажљиво осам пута ударио копитом о земљу. Оно што је било још импресивније, Ханс је умео да сабира и разломке. Када би Фон Остен на табли написао 1/2 плус 1/3 Ханс би најпре ударио пет пута, а затим после краће паузе још шест пута и на тај начин дао тачан одговор 5/6. Хансово знање аритметике постало је изазов за многе истраживаче па је група стручњака на челу са познатим психологом Карлом Штумфон (Carl Stumpf) обавила пажљиво испитивање и закључила да Ханс заиста уме да рачуна. Међутим, у тај резултат није био уверен и Штумфов асистент који је тражио да се експеримент понови. Написао је задатак на табли и уочио да кад год је само Ханс видео постављени задатак давао је погрешан одговор, а када је постављени задатак на табли видео и Фон Остен, Ханс је давао тачан одговор. Закључак је био несумњив: Фон Остен је на неки начин, неким гестом, на пример, давао Хансу знак када да престане да удара копитом. Доказано је да уместо Ханса ипак рачуна Фон Остен (Devlin, 2001: 33–35).

Овај случај бацио је сенку на резултате тешких, сложених и дуготрајних истраживања на животињама које је, од тада, увек пратило сумњичаво питање – да се не понавља случај са коњем Хансом? Наравно, то не значи да су таква истраживања прекинута. Напротив, њих је све више, у складу са развојем техничких могућности испитивања. Овај случај нам показује још нешто:

некада, наизглед, мала грешка у истраживању или организацији експеримента може довести до екстремно погрешних закључака. Такав један превид у извођењу експеримента приписује се и аутору чија су истраживања у 20. веку, у великој мери, заслужна за ставове које имамо о когнитивном развоју деце – Жану Пијажеу (Jean Piaget).

ПСИХОЛОГИЈА БРОЈАЊА – ПИЈАЖЕ, ДЕЦА И БОМБОНЕ

Пијаже, када је у питању број, поставља две кључне тезе. Прва је да деца до десет месеци старости немају свест о *очуваности објекта* и друга је, да до пет година не поседују *осећај за број* (Пијаже, 1953).

Пијаже, први закључак заснива на запажању да беба од десет или мање месеци престаје да тражи неки предмет, на пример играчку, ако јој неко тај предмет сакрије под ћебе. По Пијажеовом мишљењу то се дешава зато што беба мисли да је предмет престао да постоји. Међутим, новија истраживања указују да је вероватнији закључак да беба нема довољно развијену координацију руку да би могла да направи покрет према скривеном предмету. С друге стране, познато истраживање које је спровео амерички психолог Тони Сајмон (Tony Simon) са сарадницима показују, међутим, да број спада међу најзначајније одлике и облике физичког света који дете „очекује да види” као структуру тог света. Експеримент је спроведен са бебама од 3 до 5 месеци где су нумеричке способности истраживане коришћењем парадигме *кршење очекивања*. Ако беба види да иза завесе нестају две лутке, неће реаговати, кад види, након што се завеса подигне, две црвене лопте. Али ће реаговати ако види само једну лопту. Истраживање је показало да су бебе осетљиве на немогуће исходе након операција сабирања или одузимања на малим скуповима објеката, без обзира на промену идентитета. Дакле, очигледно је да трансформација једног предмета у други изазива мању збуњеност код бебе него промена у броју (Simon, Hespos, Rochat, 1995: 254–269).

Пијажеова друга теза је да деца не поседују осећај за број све до узраста око пет и по до шест година. Један од разлога зашто је то тако јесте, по Пијажеу, чињеница да деца немају развијено осећање очувања количине или квантитета. Пијаже у свом познатом предавању из 1949. године, које смо поменули, наводи, као аргумент за овај закључак, експеримент у коме дете упорно тврди да има више воде у вишој посуди него у нижој посуди и поред тога што види да се иста вода пресипа из једне посуде у друге. По Пијажеу очување количине постоји тек онда кад дете стекне појам да је целина састављена од делова које можемо да распоредимо на било који начин, дакле, када стекне представу о томе да размештање предмета у групи не мења њихов број.

Пијажеов кључни експеримент, на чије резултате многи савремени истраживачи имају примедбе, изгледа овако: психолог би детету од четири године показао ред од шест флаша и ред од шест чаша који су међусобно једнако удаљени, а затим би га питао чега има више. Дете би одговорило да их је исто. Затим би истраживач размакао чаше тако да образују дужи ред и поновио питање. Дете би одговорило да сада има више чаша. Дакле, тврдио је Пијаже, четворогодишњаци не схватају идеју очувања броја, јер не уочавају да размештање предмета у групи не мења њихов број.

Велики број истраживача указао је, по њиховом мишљењу, на кардиналну грешку коју Пијаже прави у овом експерименту: он није узео у обзир да разговор са малом децом, па и вербална комуникација уопште, никада не може да се ослободи утицаја емоција и социјалног контекста. На овај проблем вербалне комуникације указали су, касних 60-их година, Жак Мелер (Jacques Mehler) и Том Бевер (Tom Bever). Они су поновили Пијажеов експеримент, али са двогодишњом и трогодишњом децом у коме су деца у потпуности била успешна. Истраживачи су у овом експерименту уочили једну околност за који мисле да је одлучујућа за добре резултате која су деца у њиховом експерименту постигла.

Деца око пете године старости, с којом је Пијаже радио, почињу да развијају осећај за *контекст* у коме се питање поставља. Резоновање типа „шта он заправо хоће?”, својствено је узрасту деце с којом је Пијаже радио, а што он није узео у обзир. Да би потврдили да деца старија од две године имају добар осећај за број, Мелер и Бевер изменили су Пијажеов експеримент тако што су редуковали вербални садржај. Уместо чаша и флаша, детету су показали два реда бомбоница. У једном реду било је шест бомбоница, а у другом четири. Некада би редови били исте дужине, некада би био дужи ред од шест, а некада ред од четири бомбонице. Уместо да поставе питање у ком реду има више бомбоница, детету би рекли да узме један ред и поједе га. Свако дете, без изузетка, узима ред у коме има шест бомбоница без обзира да ли је у том тренутку тај ред дужи или је дужи ред од четири бомбонице (Mehler & Bever, 1969).

Џејмс Мекгеригл (James McGarrigle) и Маргарет Доналдсон (Margaret Donaldson) су такође направили једну варијацију Пијажеовог експеримента, овог пута у луткарском позоришту. Као и Пијаже образовали су два реда са истим бројем предмета и питали дете у ком реду има више предмета. Дете би дало тачан одговор. Испитивач би тада погледао у страну, а плишани меда из луткарског позоришта би размакао предмете у једном реду. Кад би се истраживачпоново окренуо у правцу предмета, рекао би детету да је шашави меда направио збрку и поново га питао у ком реду има више предмета. Дете је, по овим истраживачима, очигледно сматрало питање смисленим, с обзиром да истраживач није видео шта је меда урадио, и давало би тачан одговор. Али када би испитивач поновио поступак тако што би он пореметио редове тако да дете то види, на питање о броју петогодишњаци би одговор заснивали на дужини исто као у Пијажеовом експерименту (McGarrigle & Donaldson, 1974-1975: 341–350).

Један од експеримената који се бави истраживањима на деци најранијег узраста и који је изазвао велику пажњу, јесте експеримент који су извели Ранка Бијељац и њени сарадници у Лабораторији за когнитивну науку и психолингвистику у Паризу. Учесници експеримента биле су бебе старости само четири дана. Бебе су могле најпре да чују низ двосложних речи, а затим низ тросложних речи. Замена једне двосложне речи другом двосложном није изазивала никакву реакцију, замена једне тросложне речи другом тросложном такође. Једина реакција је била када би се низ речи истог броја слогова наставио речју другог броја слогова. За мерење реакције, истраживачи су користили бебин рефлекс за сисање, тако што су повезали цуцлу преко трасдуктора за притисак са компјутером (Bijeljac-Babić, Bertonici, Mehler, 1991: 711–721). Важно је истаћи да је ово „рачунање” беба ограничено на разликовање бројева 1, 2, 3. Деца млађа од годину дана нису способна да разликују групу са четири предмета од групе са пет или шест предмета.

Аналогија, као што знамо, није поуздан метод закључивања, али, ипак желимо, да укажемо на једну сличност која се јавља у свим истраживањима *осећаја за број*. Истраживања спроведена на људима, па чак и на овако раном узрасту као у претходном експерименту, увек откривају једну *бројевну границу* која се зове број *три*. Ми опажамо да нечега има 1, 2 или 3 без бројања, бројање почиње тек ако је нечега 4 и више.У сваком систему за представљање бројева, који нам је познат, остао је траг овог посебног статуса прва три броја, који се увек означавају на исти начин: 1 се означава једном цртом, 2 помоћу две црте, 3 помоћу три црте. Такав је случај са римским системом где су, као што је познато, прве три цифре I, II, III. У мајанском систему користе се тачке: *, **, ***. Исти случај је и са арапским бројевима. Староиндијски систем, од кога они потичу, користио је водоравне црте: —, =, ≡, који су када је писање почело да се изводи без подизања оловке са папира, добили изглед данашњег броја 2 и 3 (Z, ∃). У неком тренутку прва црта постала је усправна и ето их: 1, 2, 3, који су кроз штампу стилизовани овако како их данас познајемо (Devlin, 2001: 65–66).

Али треба нагласити да наше дружење са бројем почиње много пре појаве Талеса и Питагоре. Бројеви су били део исконске митолошке и религијске логике пре него што су прешли у математичку логику. Они су део нашег разумевања света које се не односи увек на бројање и *квантитет*. Напротив, бројеве много чешће користимо када желимо да кажемо нешто битно о *квалитету* и својствима света који је у нама и око нас. Хришћански Бог, на пример, периоде стварања света дели на дане у којима се стварање одиграва, уносећи тако број у саму структуру света.[4] И не само света, већ је и Бог Један и Тројица, у исто време, такав је и старословенски Триглав, такав је и индијски бог Брама који има три лица. У тој логици, број три, који исказује

[4] Бројеви се на много начина појављују у *Библији*. Од броја дана стварања света, преко загонетног броја година живота првих људи (Метузалем је, на пример, живео 969 година), четврте књиге Мојсијеве која носи назив „Књига бројева”...

суштинско својство Бога, „већи” је од било ког другог броја, као што се број 12 (12 апостола, 12 богова на Олимпу...) *разликује* од броја 11 за много више од једне јединице. Такође, потрага за идеалном пропорцијом и златним пресеком, открива нашу исконску потребу да бројем искажемо и наш однос према лепоти, а причом о 10 божјих заповести већ вековима, покушавамо да обухватимо доброту, сматрајући да нам управо број 10 у томе суштински помаже. И зато, док обављамо неки рачун са бројевима, ми често нисмо ни свесни у којој мери преко бројева учествујемо, не у математичким операцијама, већ у једном прастаром ритуалу општења и размене са светом.

Наравно, на крају, ослобођени било какве илузије о „дефинитивним одговорима”, желимо да нагласимо да је наша намера у овом раду, да подвучемо, нагласимо и истакнемо дубину проблема у коме се налазимо сви ми који се, на овај или онај начин, бавимо бројем. Прича о броју у великој мери подсећа на причу о деди и репи, али без срећног краја. Колико год математичара, филозофа, психолога и свих других научника формирало ланац који би да „ишчупа” број, испоставља се да је корен много дубљи него што смо очекивали и да увек има „још”.

Литература

Badiou, A. (2016). *Eloge des mathématiques*. Paris: Flammarion.

Bijeljac-Babić, R., Bertonici, J. & Mehler, J. (1991). How do 4-day-old infants categorize multisyllabic utterances?. *Developmental Psychology*, 29, 711–721.

Божић, М. (2002). *Преглед историје и филозофије математике*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Boyson, S. T. & Bernston, G. G. (1996). *Quantity-based interference and symbolic representation in chimpanzees*. *Journal of Experimental Psychology*, 22, 76–86.

Bourbaki, N. (1970). *Théorie des ensembles.* Paris: Bourbaki.

Goodstein, R. L. (1987). Postojanje u matematici. *Novija filozofija matematike*. Beograd: Nolit.

Dantzig, T. (1945). *Number, the language of science*. New York.

Девлин, К. (2001). *Математички ген*. Београд: Плато.

Diels, H. (1983). *Predsokratovci I*. Zagreb: Naprijed.

Кнежевић, В. (2016). *Математика у Платоновој филозофији*. Београд: Српско филозофско друштво.

Koehler, O. (1951). *The ability of birds to count*, Bull. of Animal Behaviour, 9.

Matsuzawa, T. (1985). *Use of numbers by a chimpanzee*. *Nature*, 315, 57–59.

Mehler J. & Bever, T. G. (1969). Cognitive capacity of very young children. *Iowa Science Theachers Journal*, 6(4), Article 12.

McGarrigle, J. & Donaldson, M. (1974–1975). *Conservation accidents*, Cognition, 3, 341–350.

McComb, K., Packer, C. & Pusey, A. (1994). Roaring and numerical assessement in contests between groups of female lions, Panthera leo. *Animal Behavior,* 47, 379–387.

Новија филозофија математике (1987). Београд: Нолит.

Piaget, J. (1953). La genèse du nombre chez l'enfant u: *Initiation au calcul*. Paris: Cahier de pedagogie moderne.

Расел, Б. (1998). *Историја западне филозофије*. Београд: Народна књига.

Szabo, A. (1978). *The beginnings of greek mathematics*. Boston: D. Reidel publishing.

Simon, T. J., Hespos, S. J. & Rochat, P. (1995). *Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn* (1992), Cognitive Development, 10, 254–269.

Фоменко, А. Т. (1997). *Статистичка хронологија – математички поглед на историју*. Београд: Математички институт САНУ.

Фрибе и Алберс, Ф. (2015). *Тајни живот бројева*. Београд: Лагуна.

Хокинг, С. (1988). *Кратка повест времена*. Београд.

Carnap, R. (1987). Logicističko zasnivanje matematike. *Novija filozofija matematike*. Beograd: Nolit.

Milomir D. Erić
University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice
Olivera R. Marković
University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

ON SOME ASPECTS OF NUMBER AND NUMERACY

Summary

In this paper, we tried to shed light on *the problem of number* from different angles. We first analyzed the key definitions of number which determined our understanding of number in the science of mathematics and mathematics teaching. It primarily concerns the understanding of number in the philosophy and mathematics of Ancient Greece, the Pythagoreans and Plato. Then, we pointed to a completely different understanding of both mathematics and the notion of number in the contemporary philosophy of mathematics. The emphasis was placed on the logicist definition of number. What suggests itself as a kind of conclusion is the existence of *a priori* structure which allows for different attitudes towards number, even in animals, or in children from the earliest age. This segment of analysis was supported by numerous psychological research publications. We also pointed to the significance of the notion of number in a broader, spiritual context of our culture.

Keywords: *number, mathematics, the Pythagoreans, psychology, mythology.*