

Ненад Милинковић*
Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице
Сања Маричић*
Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице

НЕПОЗНАТА И ПРОМЕНЉИВА – ПРОБЛЕМ УЧЕЊА РАНЕ АЛГЕБРЕ**

Апстракт: У раду аутори скрећу пажњу на потешкоће које прате увођење симбола и симболичке нотације у млађим разредима основне школе. У том контексту посебну пажњу скрећу на правилно разумевање појма непознате и променљиве на овом узрасту и указују на широк спектар различитих проблема везаних за разумевање слова као симбола којим се означава непозната или променљива у раној алгебри. На примеру формирања појма непозната и примеру формирања појма променљива показано је како се може обликовати проблем реалног контекста, на различитим нивоима апстрактности. У овом процесу реално засноване ситуације представљају извор за развијање математичких појмова, алата и процедура у којима ученици у каснијој фази могу применити математичка знања, која временом постају општија и формалнија, а самим тим и мање везана за контекст.

Кључне речи: алгебра, непозната, променљива, почетна настава математике, реални контекст.

УВОД

Први сусрет са алгебром дуго времена био је преломни тренутак за већину људи у одлуци да математика није за њих и да они такве математичке идеје не разумеју. Разлог томе крије се у чињеници да је алгебра, као област математике, посебно апстрактна (Breiteig & Grevholm, 2006) и да ученици имају проблем са њеним разумевањем. Основна карактеристика алгебре је алгебарска нотација. Ученик се са симболима и симболичком нотацијом сусреће већ на почетку учења математике у оквиру аритметике. У аритметици

* milinkovic.nenad84@gmail.com

* sanjamaricic10@gmail.com

**

Рад је настао у оквиру пројектних активности које подржава Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, Уговор број 451-03-68/2022-14 од 17. 01. 2022. године.

симболи имају конкретно, одређено значење и ученици их усвајају лакше и са већим степеном разумевања. За разлику од аритметике у којој оперишемо бројевима и бројевним израчунавањима, у алгебри ученик испољава способност читања, писања и манипулације бројевним и симболичким репрезентацијама у изразима, формулама, једначинама, неједначинама и флексибилно примењује граматичка правила алгебарског језика (Свијановић, 2016: 5). За Усискина алгебра је *језик*, а да бисмо разумели тај језик морамо пре свега да разумемо појам променљивих, односно оно шта променљиве представљају (Usiskin, 1997). Истраживања Карахера и сарадника (Carragher, Schliemann, Brizuela, 2000) показала су да ученици имају највише потешкоћа у схватању да слово n (или било које друго слово) може означавати било који број. Отуда се као један од најважнијих задатака учења алгебре на раном узрасту намеће упознавање ученика са алгебарском нотацијом, посебно ако се има у виду да значајан услов развијања алгебарских појмова обухвата и разумевање алгебарских симбола и њихова примена у изражавању алгебарских генерализација (Милинковић и Маричић, 2019).

НЕПОЗНАТА И ПРОМЕНЉИВА – ИЗАЗОВ УЧЕЊА НА МЛАЂЕМ ШКОЛСКОМ УЗРАСТУ

У аритметици је доминантна тежња ка добијању нумеричких одговора у операцијама са конкретним бројевима и величинама. У тренутку када се у наставу математике уведу непознати бројеви настају тешкоће, јер се јавља проблем израчунавања и сталне тежње ученика да задатак може решити само ако су му све вредности познате. Бројни аутори као кључне проблеме везане за учење и наставу алгебре издвајају: 1) неадекватно схватање појма непозната и променљива (Akgün & Özdemir, 2006; Stephens, Blanton, Knuth, Isler, Gardiner, 2015; Carragher, Schliemann, Schwartz, 2008) и 2) неправилно схватање слова као ознака за непознату или променљиву (Booth, 1988; MacGregor & Stacey, 1997; McNeil et al., 2010; Specht, 2005).

За Скемпа појам променљиве (Skemp, 1986) јесте кључни појам у алгебри (према: Akgün & Özdemir, 2006). Исти став износе и Кнут и сарадници, који појам еквивалентности и променљиве посматрају као два најосновнија појма у алгебри (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, Stephens, 2005). У почетној настави алгебре бројне потешкоће везују се за појмове *непозната* и *променљива*. Ученици који се сусрећу са идејом променљиве на почетку је поистовећују са непознатом, као бројем или конкретном вредношћу која је непозната. У ситуацијама када се ученик сусреће са променљивом x , види је као слово које има скривену вредност, али не и као низ вредности које може имати. Правилна изградња појма непознате и променљиве неопходна је у процесу развијања математичког мишљења и учења алгебарских садржаја. Једна од најзначајнијих карактеристика алгебре је употреба слова и специфичне алгебарске нота-

ције за приказ вредности у математичким изразима и једнакостима. У аритметици слова углавном представљају скраћенице, а у алгебри слова служе као променљиве или непознати бројеви (Van Amerom, 2003). Могли бисмо рећи да коришћење симбола и његова примена за изражавање алгебарских истина подразумева и постојање специфичног алгебарског језика који представља „прецизан, тачан и концизан облик нотације, којим се на ефикасан и једноставан начин изражавају одређене алгебарске истине” (Милинковић, 2021: 67).

Бројна истраживања указују на проблеме схватања симбола као променљиве или непознате од стране ученика у учењу и решавању алгебарских проблема. У истраживању, на узорку ученика узраста од 13 до 15 година, Кучеман (Küchemann, 1978) долази до закључка да ученици слово схватају на следеће начине: 1) *слово као процењена вредност* (вредност слова се одређује одмах на основу процене, тако да нема прелазних корака израчунавања непознате), 2) *слово се игнорише*, 3) *слово као објекат*, 4) *слово као специфична непозната* (непозната која испуњава одређени захтев), 5) *слово као општи број*, 6) *слово као променљива*. Закључак аутора је да са когнитивним sazревањем расте и способност ученика да разуме појам непознате и појам променљиве. Мек Грегор и Стејси (MacGregor & Stacey, 1997) наводе да постоје докази за порекло погрешних тумачења која су у литератури често занемарена и која могу или не морају бити повезана са когнитивним развојем. Ученици често нису свесни генералности, али ни значаја који алгебарске нотације имају. Исти аутори сматрају да погрешне интерпретације ученика нису показатељ ниског нивоа развоја когнитивних способности, већ представљају покушаје да се схвате нове нотације, које су проузроковане преношењем значења из других контекста. Аутори наводе да је то порекло повезано са: интуитивним претпоставкама и прагматичним резонавањем о новој нотацији са којом се ученици сусрећу (кроз анализу са познатим системима симбола), као и сметњама које настају као ефекти погрешног одабира наставних садржаја. Тако препознавање порекла проблема представља неопходан услов за побољшање наставе алгебре.

Истраживање Спехта (Specht, 2005) показује да се потешкоће ученика у вези са разумевањем променљивих огледају у: разумевању израза у којима се симбол x може користити за описивање општих правила и односа, када није ограничен само на означавање непознатог броја; прихватању симболичког израза као резултата у задатку, али и схватању значења да x може бити било који број. Дакле, схватање ученика оријентисано је на оно на шта су ученици навикли раније и што природно очекују као решење једначине или неједначине у задатку.

Слично томе, проблем схватања симбола може настати и када ученици симболе прихватају искључиво везане за одређени број, односно, када слову одмах при сусрету са њим додељују одређену бројевну вредност. Често је та вредност повезана са ранијим искуством и проблемима са којима се ученик

сусретао. Када им се задају задаци попут *Напиши број који је двоструко већи од x* , ученици тешко прихватају запис $2x$ као коначан одговор, већ инсистирају на томе да га замене одређеним бројем (Booth, 1988).

Са друге стране, слова се појављују и у аритметици, али на сасвим другачији начин. Словне ознаке у аритметици представљају најчешће скраћенице назива објеката и предмета и директно упућују на сам појам. Овакво схватање и употреба словних ознака од стране ученика касније води дубљем неразумевању симбола као ознаке за променљиву или непознату. До таквих резултата у истраживању дошли су и Мек Нил и сарадници (McNeil et al., 2010), који су од ученика тражили да протумаче алгебарске изразе у задатку, у контексту да одреде укупну цену четири торте и три колача (нпр. $4 \cdot t$ и $3 \cdot k$). Њихов успех у решавању задатка зависио је од симбола који су ученици користили у изразу. Истраживање је показало да ученици боље резултате постижу када симболи, који су коришћени у изразу, нису били значењски везани за сам симбол (на пример, x или неко друго слово као ознака за цену торте), него када су симболи у изразу били коришћени као ознака за назив (на пример, t као ознака за цену торте, а k као ознака за цену колача). Такав резултат директно упућује на аритметичку основу разумевања симбола и улогу аритметике у учењу свих других садржаја математике.

За разлику од аритметике, слова у алгебри (симболи) имају доста шири контекст примене и значења. Према мишљењу Радфорда (2004), кључни елементи развоја алгебарског размишљања проналазе се у односу који постоји између *синтаксе* (значења реченице – изрази) и *семиотике* (значење симбола). Аутор сматра „да синтакса лежи на 'површини структура', и представља само мртву материју, сенку дубоке, структурно регулисане, менталне активности, док се стварна природа ствари види у њиховом правом значењу. Нема супротности између синтаксе и значења. Сваки знак има значење. У супротном, то не може бити знак. Насупрот томе, свако значење је апстракт или ентитет – који проналази своју функцију само у знаковима” (Radford, 2004: 165). На сличан начин Сфард и Линчевски (Sfard & Linchevski, 1994) сматрају да алгебарски симболи не говоре сами о себи, већ оно што се у њима види зависи од потреба конкретног проблема на који се односе.

Све је више аутора и истраживачких радова који сугеришу да алгебарске нотације треба користити што раније у настави алгебре. Резултати истраживања показују да ученици млађих разреда основне школе могу научити и разумети елементарне алгебарске идеје и репрезентације као саставни део наставног програма математике на млађем школском узрасту (Carragher et al., 2000; Carragher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Carragher et al., 2008). Према мишљењу аутора, ученици могу да науче да користе слова за означавање непознате вредности, које укључују слова и бројеве без потребе за удаљавањем од њих. Поред тога, ученици се могу оспособити да раде са непознатим вредностима и извлаче закључке о операцијама, без обзира да ли знају вредности непознатих. На овај начин они су у ситуацији не само да разумеју већ и да смислено користе алгебарске изразе.

Са друге стране, истраживања показују да ученици млађег школског узраста могу схватити да је $a + b - b = a$, за било коју вредност a и b (Carpenter & Levi, 2000; Carpenter & Franke, 2001). Овакви налази упућују на чињеницу, да деца овог узраста могу савладати алгебарске садржаје и овладати алгебарским нотацијама, само је потребно на прави начин приступити овим садржајима и омогућити им да природно кроз међусобну сарадњу логички расуђују и изводе генерализације о односима. Према мишљењу Меира (Meira, 1995), симболизација је динамичан процес, у ком се ствара и развија значење симбола. У овом процесу, симболички системи обликују саме активности из којих се појављују, док истовремено, исте те активности обликују значења симбола који се појављују.

Блантон и сарадници (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, Newman-Owens, 2017) сматрају да се реконцептуализацијом појма променљиве може утицати на увођење променљиве и симбола за њено означавање много раније, али да је потребно пронаћи начин да се претерана апстрактност симбола ублажи и симболи, као ознаке за променљиве, усвоје на прави начин. Исти аутори сматрају да потреба за увођењем алгебарских нотација у наставу већ на почетку математичког образовања, има сврху да убрза дечије кретање кроз програм математике на раном узрасту, кроз везу која постоји између анализирања, апстракције, генерализације и њеног превођења у специфичан језик симбола, што уједно представља скуп процеса карактеристичних за развијање и формирање свих појмова у математици на млађем школском узрасту.

Ученици се рано сусрећу са алгебарским проблемима, па отуда потреба за алгебарском нотацијом и то на почетку математичког образовања. У неким задацима се, чак, и сугерише употреба непознатог броја и потреба за његовим означавањем словом, као на пример, *Који број треба додати броју 5 да би се добио број 10? Од ког броја треба одузети број 10, да би се добио број 5?* Када ученици овладају идејом непознатог броја кроз једначине, постепено овладавају и идејом променљиве кроз неједначине, а до генерализованих алгебарских нотација формирају и идеју „независно променљиве” – симбол који представља ознаку за било који број из скупа бројева. За увођење непознате и променљиве Фуџи и Стивенс (Fujii & Stephens, 2008) предлажу да се уместо квази променљиве почне користити неки други облик симболичке нотације (троугао, кружић, квадрат и др.), све до тренутка када ученик буде потпуно свестан генерализација и законитости алгебре. Тако симболичка нотација којом се објашњавају односи и везе алгебре треба да постоји, али није увек неопходна. Прелаз од конкретнoг ка симболичком запису и употреби слова треба да произилази из конкретних математичких реченица и да буде ослоњен на свакодневни говор (Ferrari, 2006; Radford, 2002). Дакле, разумевање алгебарских симбола је један комплексан процес који укључује читав низ услова контекста и ситуација на које се сам симбол односи. Слично схватање можемо проширити и на све оне једнакости и изразе у којима се симбол појављује у својству непознате или променљиве.

Очигледно је да постоји широк спектар различитих проблема везаних за разумевање слова као симбола којим се означавају непознате или променљиве у раној алгебри. Симболи и знакови се не могу узети искључиво као алат, већ као компонента менталних активности, односно огледало унутрашњих когнитивних процеса, који омогућавају извршавање акција, које захтевају контекстуалне активности у којима појединци учествују. Према мишљењу Радфорда (2000), овде се види „теоретски помак од онога што знаци представљају до онога што нам омогућавају да урадимо” (Radford, 2000: 241). Са аспекта значења симбола, треба имати у виду да они подразумевају културно симболичке системе у оквиру којих појединац размишља и који превазилазе индивидуално мишљење појединца. Са једне стране, они функционишу као оруђе које омогућава појединцу да се укључи у когнитивне процесе. Са друге стране, они представљају део система који превазилазе појединца и одређени су кроз друштвену стварност (Radford, 2000).

Схватање симбола и њихово разумевање од стране ученика, у великој мери, утиче и на начин развијања алгебарског мишљења. Треба имати у виду да употреба алгебарских симбола не подразумева само алгебарске активности и да „последично искључује решавање једначина као алгебарске активности, јер укључује прелазак са унапред познатог полазног броја ка непознатом броју, док алгебарске методе укључују кретање уназад од непознатог броја ка познатом броју” (Aczel, 1998: 26).

У решавању алгебарских задатка и развијању алгебарског начина размишљања посебно се могу издвојити два значајна тренутка: 1) прелаз са вербалног језика на симболички запис, 2) прелазак са аритметике на алгебру. Сваки од њих условљен је одређеним односима који постоје између мишљења ученика, наставе и карактеристика алгебре. Велики проблем у разумевању слова, као ознаке непознате или променљиве, проистиче из различитих контекста употребе слова у математици. Да бисмо потпуније сагледали разлике, које постоје у значењу слова у математици, узмемо следеће симболичке записе: $O = a + b + c$; $5 + x = 35$; $k \cdot 1 = k$; $n = t : 2$ и др. Ако се у обзир узму наведени алгебарски записи, можемо рећи да сваки од њих има другачије значење. У првом, запис називамо формулом, у другом је једначина, у трећем је представљено одређено својство аритметичке операције, док је у четвртном функција, односно формула којом се изражава функционална зависност. Различити записи одражавају и различита значења која слова имају у њима. Тако у првом случају слова изражавају различите величине – обим и дужине страница троугла, у другом случају то је непозната у једначини. У трећем случају слово представља слободну променљиву, односно може представљати било који број, док у четвртном случају слова представљају зависну и независну променљиву у функцији. Ако се све ово има у виду, слова у настави математике имају различита значења. Тако, слово може бити замена за конкретан број или вредност; замена за број који је само тренутно непознат;

слободна променљива која може бити било који број и слово као ознака којом се изражава функционална зависност.

Из претходно наведеног, можемо рећи да задатак који се поставља пред ученике на овом узрасту треба да буде везан за развијање идеје симбола у алгебарским записима у облику:

- непознате (скривени број, број чију вредност треба открити, као непозната, али фиксна величина – једначине);
- променљиве (скуп бројева који испуњавају одређене услове функционалне зависности – неједначине, функције, низ);
- слободне променљиве (симбол који представља било који број у одређеном скупу бројева).

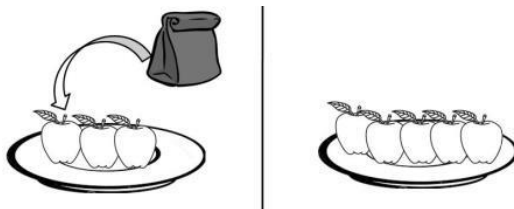
Имајући наведено у виду, намеће се питање: *Који методички приступ треба одабрати како би резултирао формирањем алгебарских појмова непознате и променљиве и разумевањем ових садржаја?* Одговор на ово питање је веома битан, јер од његовог дизајнирања зависе и резултати тог процеса. Иако алгебарска нотација даје веће могућности за манипулацију и даљу анализу, ипак свакодневни језик омогућава да се генерализацији да смисао, пренесе информација и употпуни контекст који недостаје у алгебарској нотацији. Управо из тог разлога полазиште за увођење непознате и променљиве је природни језик ученика, проблеми изражени кроз реалне ситуације свакодневног живота, који представљају добру основу за разумевање идеја алгебре и развој алгебарских способности. Поред тога, веома је важно користити различите видове визуелних репрезентација, као вид алгебарских представа: графикони, слике, скице и цртежи, којима се може изражавати функционална зависност и односи између величина. Величине изражене на овај начин могу бити познате или непознате.

Оквир таквог учења можемо представити кроз следеће фазе:

- 1) реалистична ситуација којом се изражава алгебарски проблем,
- 2) моделовање реалистичне ситуације коришћењем различитих начина репрезентације проблема;
- 3) превођење идеје на конкретно подручје референтног алгебарског језика уз коришћење алгебарских симбола и операција.

У наредним примерима илустроваћемо процес учења заснован на издвојеним фазама. Навешћемо пример задатка који је заснован на реалној ситуацији свакодневног живота, који може послужити као подстицај за развијање идеје непознатог броја (Пример 1).

Пример 1. *Колико јабука је додато у корпу са воћем?*

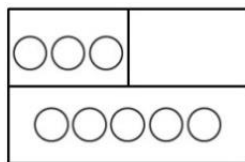


На основу реалне ситуације која је изражена сликом, представљен је задатак који може послужити да развијемо идеју непознатог броја. На основу слике ученик закључује о количинама које су дате у задатку. Ово закључивање представља процес хоризонталне математизације којом се из поља реалног контекста постепено прелази на поље формалне нотације. Ученик у овом процесу треба да уочи шта је непознато у задатку. Слика која је везана за идеју непознатог броја је кеса у којој се налазе јабуке, при чему ученик не зна колико је јабука у тој кеси. Пошто је број јабука непознат, а јабуке се додају у корпу, може се закључити да у једнакости коју би написали, непозната представља један од сабирака. Први корак у развијању идеје непознате је стварање менталне представе непознатог броја, при чему се у облику математичког записа он може представити и као „држач места”. Идеју формирања непознате у почетку развијамо без његове симболизације, тако да је реч очигледно о вези која постоји између аритметике и алгебре на овом нивоу. У случају овог задатка математичка једнакост би била:

$$3 + \square = 5$$

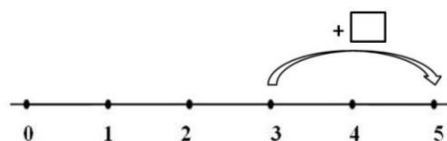
Квадрат или „држач места” у овом случају има улогу непознате, при чему се овај запис и даље не може посматрати као једначина. Проблем дат у реалном контексту превели смо на језик формалне математике и на одређени начин генерализовали ову ситуацију. Како бисмо одредили број који недостаје, ученици могу користити претходно знање у области сабирања да одреде вредност непознате, или се могу послужити моделом који би им приближио ову ситуацију и омогућио да закључе који то број треба додати броју 2 да бисмо добили број 5.

Након оваквих примера, који на очигледан начин представљају непознати број, ученике је потребно постепено удаљавати од конкретног и постепено прелазити у раван формалне математике. Први модел који може послужити јесте модел у ком се на очигледан начин могу сагледати односи који изражавају збир, а представљани су идеографом (Слика 1).



Слика 1. Моделовање проблема идеографом

Даље удаљавање од конкретног је прелазак на моделовање ситуације на бројевној полуправој (Слика 2).



Слика 2. Моделовање проблема на бројевној полуправој

На овај начин можемо искористити моделе како бисмо записали математичку једнакост са непознатим бројем, али и ослонац како бисмо увели појам непознате (непознатог броја „ x ” који се може одредити) и записали једначину. На основу графичког приказа ученик је у позицији да уочи односе између јабука које су биле на тањиру пре додавања, али и јабука које се додају на тањир из кесе а чији је број непознат. Тако ће овај графички приказ послужити да би на овај проблем реалног контекста реаговали једначином на чисто алгебарски начин:

$$3 + x = 5$$

Са друге стране, модели могу послужити и као помоћ у одређивању непознате, јер се на сликовит начин може изразити однос између познатих и непознатих вредности у проблему. Тако ученик закључује да ће број јабука које су додате на тањир из кесе израчунати када од укупног броја јабука на тањиру одузме број јабука које су биле на тањиру пре додавања. Ситуација се преводи на апстрактно поље алгебре, а даље се може закључити да непознати сабирак израчунава тако што се од збира одузме познати сабирак. Решење новог задатка у алгебарском облику било би:

$$x = 5 - 3$$

Решење новог задатка у алгебарском облику било би:

$$x = 2$$

Ученик закључује да је број додатих јабука 2. У процесу провере тачности решења једначине задатак је испитати да ли је израз који се налази са десне стране знака једнакости еквивалентан броју који се налази са његове десне стране, односно:

$$3 + 2 = 5$$

$5 = 5$, што значи да смо добили тачно решење.

На крају ученик прелази поново пут хоризонталне и вертикалне математизације, кроз процес у ком се он пита: *Шта ово математичко решење представља у реалном свету?* У овом случају решење је број јабука које су се налазиле у кеси и које су додате на тањир. Да би одредио колико је јабука додато у корпу, слика која изражава проблемску ситуацију може послужити као модел, при чему би је ученик могао искористити за решавање задатка потпуно на нивоу реалног контекста. Поред тога, модели којима се ученик служио у току решавања овог задатка могу послужити и у решавању њему сличних проблема. Процес изградње модела се наставља и ученик активно ради на њему. Овај последњи корак везан је за процес генерализације, који води ка уопштавању правила о израчунавању непознатог сабирака.

За формирање идеје променљиве, такође користимо приступ који је заснован на проблемима реалног контекста. У том процесу полазимо од реалне, конкретне ситуације блиске учениковом искуству (Пример 2).

Пример 2. *Марко је у десном џепу имао 5 кликера. Колико кликера је Марко могао имати у левом џепу, ако је у оба џепа имао мање од 10 кликера?*

У почетку ученик је у ситуацији да увиђа односе који постоје у задатку и при томе закључује које вредности су познате, а које непознате. Пошто је захтев у задатку одређен са две чињенице: у десном џепу је тачно утврђена вредност кликера (5 кликера) и укупан број кликера у оба џепа (мање од 10 кликера), то ученик може закључити да је број кликера у левом џепу вредност која је променљива, али и различита. Модел који може послужити у овом случају, како би се функционална зависност изразила близак је реалном контексту и можемо га приказати табеларно (Слика 3).

Десни цеп	Леви цеп	Укупно
○○○○○○	○	6
○○○○○○	○○	7
○○○○○○	○○○	8
○○○○○○	○○○○	9

Слика 3. Моделовање проблема табеларно

У процесу закључивања приказани модел може приближити услове у задатку и на одређени начин омогућити уочавање функционалног односа који постоји између две вредности: броја кликера у левом и десном цепу и укупног броја кликера у оба цепа. На овај начин ученик је у могућности да у реалном контексту варира могуће ситуације и одређује решења проблема. Модел који се може развити из овог модела јесте нови модел, са вишим нивоом апстрактности, а то је модел таблице. У овом моделу напушта се конкретност и уместо илустрација кликера уписују се бројевне вредности (Слика 4).

Број кликера у десном цепу	5	5	5	5	5	5
Број кликера у левом цепу	1	2	3	4	5	6
Укупан број кликера	6	7	8	9	10	11

Слика 4. Моделовање проблема бројевном таблицом

У овом случају модел таблице омогућава ученику да прати промене изражене у функционалној зависности и уочава могући број кликера у левом цепу. На основу тога он закључује да је у левом цепу могло да буде: 4 кликера или 3 кликера или 2 кликера или 1 кликер. У процесу хоризонталне математизације ученик се опет може вратити у реални контекст и коментарисати реалност добијених вредности променљиве. Оваква вежбања су основа на којој се уводи појам променљиве, али касније и појам неједначине. Тако се број кликера у левом цепу изражава као променљива „ x ”.

Последња етапа у овом процесу је прелазак на симболички запис неједначине:

$$5 + x < 10.$$

У решавању неједначине могли бисмо се послужити истим моделима за одређивање вредности променљиве. У поступку решавања неједначина уз коришћење модела би се омогућио прелаз на потпуну алгебарску нотацију, тако да скуп решења ове неједначине можемо представити:

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

На крају закључујемо да је број кликера у десном њепу скуп бројева који задовољавају услов у задатку, а то је да у збиру са бројем кликера који се налазе у левом њепу мора бити мање од 10 кликера. Реалност ситуације објашњава добијене вредности, али и омогућава да ученик разуме идеју променљиве као скупа бројева који у неједначини заменом дају тачну неједнакост.

Наведен је по само један пример како бисмо илустровали приступ увођења непознате и променљиве коришћењем реалног контекста. Овакав приступ учењу у складу је са карактеристикама когнитивног развоја ученика овог узраста, као и са тежњама у савременој методици наставе математике усмереним ка идеји изградње појмова у смеру од конкретног ка апстрактном. Поред тога, ученици су у стању да боље разумеју и схвате зашто нешто уче. Проблем усвајања математичких појмова крије се и у чињеници да је настава математике врло често апстрактна ученику и да ученик овог узраста тешко схвата суштину неког појма или процеса уколико није очигледан. Самим тим, ученик ће у реалном контексту, схватити где и како то „знање” може искористити у ситуацији у свакодневном животу. Употребом реалног контекста обезбеђује се да ученици уче кроз њима смислене активности, односно, активности које разумеју и прихватају као „логичне”.

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Математички симболи имају комуникативну функцију и инструменталну улогу (Maracchia, 2013) и омогућавају да се суштина математичке мисли размењује и дели (Güçler, 2014). Међутим, суочавање са бројевима и алгебром представља велики изазов за ученике с обзиром на то да они делују двоструко: као процеси и као појмови (Tall, 2008). Тешкоће у разумевању симбола потичу од чињенице да симболи имају различита значења у различитим поставкама и контекстима, а ученици их не разумеју.

Већина истраживања која се баве проблемима учења алгебре на млађем школском узрасту потврђује чињеницу да деца у раду са садржајима алгебре различито схватају идеју слова, као ознаке за променљиву или непознату. Често су у прилици да игноришу слова, да им дају произвољну вредност или их сматрају скраћеним именима за тачно утврђене вредности или речи. Од деце млађег школског узраста не можемо очекивати да разумеју сложене алгебарске појмове, али можемо да понудимо чврсте основе неопходне за развој алгебарског мишљења, при чему се не можемо задовољити учењем математике као науке одвојене од живота ученика (Taylor-Cox, 2003).

Како би процес учења и развијања појма непозната и променљива резултирао што бољим исходима, основно је да се процес учења заснива на моделовању и трансформацији математичког садржаја и прилагођавању садржаја мишљењу ученика. Моделовање ситуација реалног света омогућава ученицима да схвате смисао алгебре. Ученици уче да моделују стварне ситуације користећи математику и размишљајући о ситуацијама које садрже вишеструке и повезане репрезентације. Постављање алгебарског проблема у контекст помаже ученицима да схвате математику и развију појмовно разумевање апстрактних репрезентација (Earnest & Balti, 2008).

У раду је на два примера показано како се може обликовати проблем реалног контекста кроз процес математизације на различитим нивоима апстрактности. У овом процесу реално засноване ситуације представљају извор за развијање математичких појмова, алата и процедура у којима ученици у каснијој фази могу применити математичка знања, која временом постају општија и формалнија, а самим тим и мање везана за контекст. Контекст „омогућава да се олакша и приближи алгебарски садржај ученицима млађег школског узраста, да створи основу да ученик у конкретној ситуацији види, уочи и искаже природним језиком односе, а потом их пребаци на апстрактни ниво” (Маричић и Милинковић, 2017: 126). Дакле, „организацијом чулног искуства из реалних ситуација граде се интуитивне основе за математичке појмове и њихово формирање, те стварање когнитивне схеме за математичке садржаје који се затим обрађују у почетној настави” (Ђокић, 2014: 670). Тако симбол не представља више вредност која се не може одредити већ представља ознаку

која само тренутно скрива вредност коју је потребно одредити. Процес одређивања тог непознатог броја условљен је очигледношћу која произилази из суштине реалног контекста проблема.

Посебну пажњу треба усмерити на улогу модела и процеса моделовања, који може бити од користи како у процесу обликовања математичког проблема тако и у поступку откривања начина за његово решење у поступку развијања правилног разумевања симбола као непознате или променљиве. Ученици би требало да буду задовољни када решавају задатке у којима је проблем из свакодневног живота, јер су то ситуације са којима се сусрећу сваког дана. Ако је проблем близак ученику, он има жељу да га реши, а знање до кога дође истражујући проблем, постаће функционалније тако да ће омогућити прелазак од конкретног ка апстрактном, односно од реалног ка симболичком. Тако симболичка нотација у алгебри постаје доступнија чулима ученика, јер је природно уграђена у реални контекст.

Литература

- Akgün, L. & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The teaching of mathematics*, 16, 45–51.
- Aczel, J. (1998). *Learning equations using a computerised balance model: a Popperian approach to learning symbolic algebra*. (Doctoral dissertation). University of Oxford.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181–202.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra*, K-12, 19, 20–32.
- Breiteig, T. & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (eds.): *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2(1), 225–232. Prague: PME.
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63–75.
- Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 251–268.
- Ђокић, О. (2014). Реалне ситуације. У П. Пијановић (ур.): *Лексикон образовних термина* (670–671). Београд: Учитељски факултет.
- Earnest, D. & Balti, A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school: Findings from a research-practice collaboration. *Teaching Children Mathematics*, 14(9), 518–522.
- Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3–4), 83–100.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 23–26.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. & Stephens, A. S. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* [International Reviews on Mathematical Education], 37, 68–76, <https://doi.org/10.1007/BF02655899>.
- Maracchia, S. (2013). The importance of symbolism in the development of algebra. *Lettera Matematica*, 1(3), 137–144.
- Маричић, С. и Милинковић, Н. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике. *Зборник радова*, 20(19), 117–130.

- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational studies in mathematics*, 33(1), 1–19.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and instruction*, 13(2), 269–313.
- Милинковић, Н. и Маричић, С. (2019). Приступ садржајима о зависности резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима математике. *Зборник радова*, 22(21), 193–206.
- Милинковић, Н. (2021). *Контекстуални приступ настави алгебре у млађим разредима основне школе* (докторска дисертација). Ужице: Педагошки факултет.
- McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, 102(3), 625–634.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237–268.
- Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In: Cockburn, A. D. & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, Norwich (UK), 4 (81–88). Norwich, UK: PME.
- Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (161–166). Norway: Bergen University College.
- Rystedt, E., Kilhamn, C. & Helenius, O. (2016). What's there in an n? Investigating contextual resources in small group discussions concerning an algebraic expression. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 21(1), 5–26.
- Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Routledge.
- Specht, B. J. (2005). Early Algebra – Processes and Concepts of Fourth Grades Solving Algebraic Problems. In M. Bosch, M. Perpiñán, M. Àngels Portabella & R. Llull (eds.): *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (706–716). Sant Feliu de Guíxols, Spain.
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. & Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra!. *Teaching children mathematics*, 22(2), 92–101.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 191–228.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematic. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24.
- Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes!. *Young Children*, 58(1), 14–21.
- Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, 3(6), 346–356.

- Ferrari, P. L. (2006). From verbal texts to symbolic expressions: A semiotic approach to early algebra. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (73–80). Prague: PME.
- Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (eds.): *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (127–140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Carpenter, T. & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (eds.), *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*, 1. Melbourne, Australia: University of Melbourne Press, 155–162.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In M. L. Fernandez (ed.): *The 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, Arizona.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87–115.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (eds.): *Algebra in the Early Grades* (235–272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.
- Cvijanović, G. (2016). Konceptualizacija pojma rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, VIII(14), 1–8.

Nenad S. Milinković

University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

Sanja M. Maričić

University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

UNKNOWN AND VARIABLE – THE PROBLEM OF EARLY ALGEBRA LEARNING

Summary

The paper draws attention to the difficulties associated with the introduction of symbols and symbolic notation in junior grades of primary school. In this context, the paper draws special attention to the proper understanding of the concepts of unknown and variable at this age and also point to a wide range of problems related to understanding letters as symbols used to denote an unknown or variable in early algebra. The shaping of a real-world context problem at different levels of abstraction is exemplified with the formation of the concepts of unknown and variable. In this process, real-world situations represent a source of developing mathematical concepts, tools and procedures in which students can apply their mathematical knowledge at a later stage because it gradually becomes more general and formalized and therefore less context-related.

Keywords: *algebra, unknown, variable, early mathematics, real-world contexts.*